III Congreso Nacional sobre la Teoría de Máquinas y Mecanismos

# APLICACION DEL METODO DE LOS ELMENTOS DE CONTORNO A EL PROBLEMA TERMOELASTICO


Juan José Anza Aguirrezabala — E.T.S.I.I. de Madrid

Francisco García Benitez — E.T.S.I.I. de Madrid

Enrique Alarcón Alvarez — E.T.S.I.I. de Madrid


## 1. EL PROBLEMA TERMOELASTICO.

El planteamiento general del problema termoelástico nos conduce a:

- Unas tensiones $\sigma_{ij}$ que deben verificar las tres ecuaciones del movimiento:

$$\left[\sigma_{ij}\left(\delta_{kj}+u_{k,j}\right)\right]_{,i}+\rho_0 F_k=\rho_0 \ddot{u}_k \qquad K=1,2,3$$

- Unas deformaciones $e_{ij}$ y unos desplazamientos $U_i$ relacionados de la forma:

$$2e_{ij}=u_{i,j}+u_{j,i}+u_{m,i}\,u_{m,j}$$

Si los desplazamientos son pequeños $2e_{ij}=u_{i,j}+u_{j,i}$

- Una ley de comportamiento, que relaciona tensiones y deformaciones de la forma: $\sigma_{ij}=\dfrac{\partial W}{\partial e_{ij}}$

W es el potencial elástico por unidad de volumen del cuerpo no deformado, referido a un estado de referencia en el que el sólido se encuentra a una temperatura uniforme $T_o$ y libre de tensiones.

Los desplazamientos y deformaciones son referidos a este estado, en el que se toma como cero, el valor del potencial interno W

- Una ecuación de conducción de calor que se puede escribir

$$q_{i,i}=T\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\theta}\dot{e}_{ij}+\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}\dot{\theta}\right)+\rho_0 R$$

T: Temperatura

$\theta=T-T_0$

$q_i=\overrightarrow{grad}\;T=T_{,i}$

- La ecuación constitutiva

$$q_i = \left( \varphi_0 \, \delta_{ij} + \varphi_1 \, e_{ij} + \varphi_2 \, e_{ik} \, e_{kj} \right) T_{,j}$$

$\varphi_0$ , $\varphi_1$ , $\varphi_2$ , son funciones escalares dependientes de $T$ , $T_{,i}$ y de $e_{ij}$

- Para sólidos isótropos $W = W(I_1, I_2, I_3, T)$ $I_1, I_2, I_3$ son los invariantes del tensor $e_{ij}$.

  El potencial interno se puede expresar por medio del polinomio

$$W = a_2 I_2 + a_3 I_3 + \sum_{i=1}^{4} \sum_{i=1}^{4} \left( A_{ij} I_i I_j + B_{ij} I_i I_j^2 + \dots \right)$$

  Considerando $I_4 = T - T_0 = \theta$

- En régimen elastico, al existir una relación lineal entre $\sigma_{ij}$ y $e_{ij}$ , el potencial interno debe adoptar la forma

$$W = G\left( 2 I_2 + \frac{\nu}{1-2\nu} I_1^2 - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha I_1 \theta \right) + f(\theta)$$

  del que se deducen la correspondiente ley de Hooke

$$\sigma_{ij} = 2G\left( e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \, \theta \, \delta_{ij} \right)$$

- La ecuación de conducción de calor es basicamente no lineal. Sin embargo si:

  El incremento de temperatura $\theta$ es pequeño, es aceptable reemplazar el -- factor T, por $T_0$ .

  Despreciamos en la expresión de W los términos de grado superior a $\theta^2$

  Considerando como ecuación constitutiva la ley de lineal de Fourier

$$q_i = -K \, \theta_{,i} \qquad \left( \varphi_0 = -K \qquad \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \right)$$

la ecuación de conducción de calor transformada es lineal

$$K \nabla^2 \theta = 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} G \alpha T_0 \dot{e}_{ii} - 2 T_0 A_{44} \dot{\theta} - \rho_0 R$$

$\rho_0 R \equiv S$ calor producido por unidad de volumen y unidad de tiempo.

$-2 T_0 A_{44} = c\rho_0$ c= calor específico

$\rho_0$ = densidad cuerpo no deformado

la ecuación de conducción de calor queda

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{K}{c\rho_0} \nabla^2 \theta + \frac{S}{c\rho_0} - 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{G \alpha}{c\rho_0} T_0 \frac{\partial e_{ii}}{\partial t}$$

k = conductividad térmica

$\alpha$ = coeficiente de dilatación

$\nu$ = módulo Poisson

Si los cambios de temperatura en el tiempo son lentos es posible despreciar los efectos de intercia, y en ese caso el último término de la ecuación que es el de acoplamiento desaparece, conduciéndonos a la ecuación clásica de conducción

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{K}{c\rho_0} \nabla^2 \theta + \frac{S}{c\rho_0}$$

Como conclusión, el problema termoelástico general, admite una formulación lineal y desacoplada, si :

Las deformaciones son pequeñas

Los incrementos de temperatura son pequeños

Las variaciones de temperatura son lentas.

En estos casos el proceso de resolución será

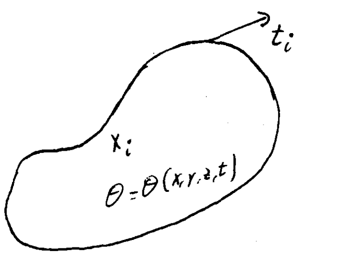
1) Determinar el campo de temperaturas $\theta = \theta(x,y,z,t)$ resolviendo la ecuación

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{k}{c\rho_0} \nabla^2 \theta + \frac{s}{c\rho_0}$$

que en el caso estacionario sin focos de calor se convierte en

$$\nabla^2 \theta = 0$$

2) Conocido el campo de temperaturas, la hipótesis establecidas permiten enfocar la resolución del problema, determinación de tensiones y deformaciones, en el marco de comportamiento lineal. Este hecho conduce

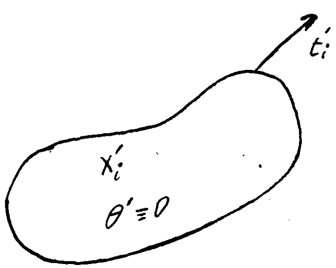



$t_i$ = fuerzas de superficie

$x_i$ = Fuerzas de volumen

$$u_i = u_i'$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}' - \gamma \theta \delta_{ij}$$




$$t_i' = t_i + \gamma \theta n_i$$

$$X_i' = X_i - \gamma \theta_{,i}$$

$$u_i'$$

$$\sigma_{ij}'$$

$n_i$ = normal exterior contorno

E = Módulo Young

de forma inmediata a la analogía de Duhamel-Nenmann que permite transformar la resolución del problema termoelástico en un problema elástico clásico, con fuerzas de volumen y fuerzas de superficie.

## 2. - El método de los elementos de contorno

En general, la resolución por vía analítica del sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna el problema elastico lineal, presenta grandes dificultades obligando al empleo de métodos aproximados, entre los que se encuentra el método de los elementos de contorno.

En la teoría lineal de la elasticidad se demuestra el 2º teorema de -- Betti cuya expresión es:

$$\int_{\partial D} t_i^1 u_i^2 \, dS + \int_D X_i^1 u_i^2 \, dV = \int_{\partial D} t_i^2 u_i^1 \, dS + \int_D X_i^2 u_i^1 \, dV$$

$D$ : dominio o cuerpo

$\partial D$ : superficie exterior o contorno

$u_i^1$ : Desplazamientos correspondientes a unas tensiones sobre el contorno $t_i^1$, y unas fuerzas de volumen $x_i^1$

$u_i^2$ : Desplazamientos correspondientes a unas tensiones sobre el contorno $t_i^2$ y unas fuerzas de volumen $x_i^2$ .

Si consideramos

Conjunto 1: sistema real de cargas y desplazamientos

Conjunto 2: sistema virtual consistente en una carga puntual unidad, en el punto (x) del espacio o medio infinito, y unos desplazamientos y tensiones determinadas por la teoría de la elasticidad (Problema Kelvin)

Carga:

$$X_i^2 = \Delta(x)\, e_j$$

$\Delta(x)$ es función Dirac

$$\int_D f(y)\, \Delta(x)\, dV(y) = f(x)$$

$e_j \quad j = 1, 2, 3$ cosenos directores dirección de la carga puntual.

Desplazamientos

$$u_i^2(y) = U_{ji}(x, y)\, e_j$$

Tensiones

$$t_i^2(y) = T_{ji}(x, y)\, e_j$$

(x) punto del espacio o medio donde se aplica la carga puntual.

(y) punto del espacio o medio, cualquiera.

$U_{ji}$ (x, y) : Función de influencia conocida. Desplazamiento del punto (y) en dirección i, cuando en (x) actúa la carga unidad en dirección j.

$T_{ji}$ (x, y) : Función de influencia conocida. Tensión en el punto (y) en -- dirección i , cuando en (x) actúa la carga unidad en dirección j.

Y ahora aplicamos la expresión del 2º teorema de Betti, quedará:

$$\int_{\partial D} t_i^1 u_i^2 \, dS + \int_D X_i^1 u_i^2 \, dV = \int_{\partial D} t_i^2 u_i^1 \, dS + u_i^1(x) \, e_i$$

Considerando que la dirección de la carga puntual coincide con un eje coordenado j, se obtiene la identidad de Somigliana.

$$u_j^1(x) + \int_{\partial D} T_{ji}(x,y) \, u_i^1(y) \, dS = \int_{\partial D} U_{ji}(x,y) \, t_i^1(y) \, dS + \int_D X_i^1 U_{ji} \, dV$$

que para j = 1, 2, 3 se desdobla en tres ecuaciones, que expresan las componentes del desplazamiento en (x) en función de dos integrales sobre el contorno y una sobre el dominio que desaparece al ser las fuerzas de volumen $X_i^1$ despreciables en la mayor parte de los casos,pero exige el conocimiento de los -- seis valores, tensiones $t_i$ y desplazamientos $U_i$ en todo punto del contorno Los problemas elasticos plantean como datos tres de ellos y su resolución implica la determinación de los tres restantes.

El método de los elementos de contorno podría desglosarse en las siguientes etapas:

1) Aplicar la identidad de Somigliana de forma que la solución fundamental (Kelvin) este aplicada en los puntos (x) del contorno del sólido.

$$c_{ij}(x)\, u_i(x) + \int_{\partial D} T_{ji}(x,y)\, u_i^1(y)\, dS = \int_{\partial D} U_{ji}(x,y)\, t_i^1(y)\, dS$$

Las singularidades que se producen y son función de la forma de la superficie en el punto (x), se reflejan en la ecuación a través de $C_{ij}$

2) Resolución de la ecuación integral anterior numericamente. Para ello es preciso:

- Discretizar la superficie en N elementos de contorno de variación de tipo (opcional) constante, lineal, parabólico .... u otros.

  Cada elemento, particularizada la superficie en los puntos requeridos (nudos) por el tipo de variación, se genera por medio de funciones de interpolación llamadas funciones de forma.

- Asumir variación de tipo (opcional) constante, lineal, parabólico u otros, para las tensiones $t_i$ y desplazamientos $U_i$ sobre cada ele-- mento de contorno, de forma que particularizadas (os) en los puntos (nodos) requeridos por el tipo de variación , tensiones y desplazamientos queden determinados sobre el elemento por medio de las correspondientes funciones de interpolación o forma.

- Considerar la identidad de Somigliana, cuando la solución fundamental (kelvin) esté aplicada en los n nodos (x) existentes en el contorno.

$$c_{ij}(x)\, u_i(x) + \sum_{K=1}^{N} \int_{\partial D_K} T_{ji}(x, y_K)\, u_i(k)\, dS_K = \sum_{K=1}^{N} \int_{\partial D_K} U_{ji}(x, y_K)\, t_i(k)\, dS_K$$

K : identifica los elementos del contorno

$Y_k$: puntos del elemento de contorno K

$U_i$ (k) : Desplazamiento elemento K

$$u_i(k) = \phi_1 u_i^{1k} + \phi_2 u_i^{2k} + \ldots + \phi_L u_i^{Lk}$$

$t_i$ (k) : Tensiones elemento K

$$t_i(k) = \phi_1 t_i^{1k} + \phi_2 t_i^{2k} + \ldots + \phi_L t_i^{Lk}$$

$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_L$ funciones de forma

$1k, 2k, \ldots, Lk$ nodos en elemento K

Al aplicar la solución fundamental en los n nodos, la identidad de Somigliana (j = 1, 2, 3) da lugar a un sistema de 3 n ecuaciones.

En cada ecuación existen 6 n variables: Los valores de $U_i$ y $t_i$ en los n nodos.

Por corresponder 3 n de las variables a los datos, nos encontramos - ante un sistema de 3n ecuaciones, con 3n incognitas que resuelto determina los valores desconocidos en los nodos del contorno.

3) Determinación tensiones $\sigma_{ij}$ y desplazamientos $U_i$ en cualquier punto del sólido.

- Conocidos los valores $U_i$ y $t_i$ en el contorno es posible aplicar la solución fundamental en cualquier punto interior (x)

La identidad de Somigliana conduce directamente a los movimientos $U_i$

$$\begin{cases} U_j(x) + \sum_{K=1}^{N} \int_{\partial D_K} T_{ji}(x, y_K)\, u_i(K)\, dS_K = \sum_{K=1}^{N} \int_{\partial D_K} U_{ji}(x, y_K)\, t_i(K)\, dS_K \\ j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

- Las ecuaciones de Lamé $\sigma_{ij} = \lambda u_{i,i} \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i})$ expresan las tensiones en función de los desplazamientos, por lo que es posi-ble reducir el cálculo de éstas a una integración sobre el contorno, que se -- realiza discretizando de manera similar.

3.- Aplicación del método de los elementos de contorno en el caso termoelástico estacionario.

- Se ha visto como la analogía de Duhamel-Neuman conduce a la resolución de ur problema elástico clásico con los datos

Fuerzas volumen $X_i = -\gamma \theta_{,i}$

Fuerzas de superficie $t_i = \gamma \theta n_i$

Además en caso estacionario $\theta_{,ii} = 0$

- Se ha visto el método de los elementos de contorno, para el caso en que $X_i = 0$

- Es necesario en este caso, transformar la integral sobre el dominio

$$\int_D X_i^1 U_{ji} \, dV$$

en una integral sobre el contorno. Esto será posible siempre que $X_i^1 = \phi_{,i}$

se considerará

$$X_i^1 \longrightarrow X_i = \phi_{,i}$$

$$U_{ji} \longrightarrow u_i^*$$ (solución fundamental)

$$I = \int_D X_i\, u_i^* \, dV = \int_D u_i^* \, \phi_{,i} \, dV$$

Como $\nabla \cdot (\phi \cdot \vec{u}^*) = \vec{u}^* \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \vec{u}^*$

$$\vec{u}^* \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (\phi \vec{u}^*) - \phi \nabla \vec{u}^*$$

$$I = \int_D div(\phi \vec{u}^*) dV - \int_D \phi \, div \, \vec{u}^* dV = \int_{\partial D} \phi \vec{u}^* \cdot \vec{n} \, dS - \int_D \phi \, div \, u^* dV$$

La teoria de la elasticidad indica que la solución $u_i^*$ del problema, carga -- puntual en medio infinito (Kelvin), puede expresarse por medio del vector de -- Galeskin en la forma

$$\vec{u}^* = \nabla^2 \vec{G} - \frac{1}{2(1-\nu)} \overrightarrow{grad} \, div \, \vec{G}$$

Empleando la igualdad

$$\overrightarrow{Rot} \, \overrightarrow{Rot} \, \vec{G} \doteq \overrightarrow{grad} \, div \, \vec{G}$$

La solución fundamental se expresa en la forma

$$\vec{u}^* = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \overrightarrow{grad} \, div \, \vec{G} - \overrightarrow{Rot} \, \overrightarrow{Rot} \, \vec{G}$$

Tomando la divergencia en ambos miembros

$$div \, \vec{u}^* = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \nabla^2 div \, \vec{G}$$

El vector de Galeskin es

$$\vec{G} = \frac{1}{8\pi G} \, r \, \vec{e}$$

r : es la distancia de cualquier punto (y) del medio infinito a el punto (x) de -- aplicación de la carga puntual.

$\vec{e}$ : vector unitario dirección carga puntual

Por tanto

$$div\,\vec{u}^* = \nabla^2 div \, \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{8\pi E(1-\nu)} \, r\,\vec{e} = \nabla^2 div\, W = \nabla^2 \Omega$$

La integral sobre el dominio quedará

$$\int_D \phi \, div\, \vec{u}^* dV = \int_D \phi \, \nabla^2 \Omega \, dV$$

Recordando el segundo Teorema de Green

$$\int_D \left(-\phi \, \nabla^2 \Omega + \Omega \, \nabla^2 \phi\right) dV = \int_{\partial D} \left(-\phi \frac{\partial \Omega}{\partial n} + \Omega \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) dS$$

Obtendremos

$$-\int_D \phi \, \nabla^2 \Omega \, dV = \int_{\partial D} \Omega \frac{\partial \phi}{\partial n} dS - \int_{\partial D} \phi \frac{\partial \Omega}{\partial n} dS - \int_D \Omega \, \nabla^2 \phi \, dV$$

y siempre que $\nabla^2 \phi = K_0$

$$\int_D \Omega \, \nabla^2 \phi \, dV = K_0 \int_D div\, \vec{W} \, dV = K_0 \int_{\partial D} W \, dS$$

la integral I, finalmente quedará

$$I = \int_{\partial D} \phi \vec{u}^{*}.\vec{n}\, dS + \int_{\partial D} \Omega \frac{\partial \phi}{\partial n}\, dS - \int_{\partial D} \phi \frac{\partial \Omega}{\partial n}\, dS - K_0 \int_{\partial D} \vec{W}.\vec{n}\, dS$$

$$\vec{grad}\, \phi = X_i$$

$$\vec{W} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{8\pi E(1-\nu)}\, r\, \vec{e}$$

$$\Omega = div\, \vec{W}$$

$$K_0 = \nabla^2 \phi$$

Aplicable a los casos siguientes:

Peso propio $\phi = -\rho g z$ $\qquad \nabla^2 \phi = 0$

Fuerza centrífuga $\phi = \frac{1}{2} \rho w^2 r^2$ $\qquad \nabla^2 \phi = \rho w^2$

Termoelasticidad $\phi = -\gamma \theta$ $\qquad \nabla^2 \phi = 0$ ((caso estacionario)

- La identidad Somigliana se estableció, para soluciones fundamentales orientadas,

  según la dirección coordenada j (j = 1, 2, 3).

  Por tanto

$$\vec{W} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{8\pi E(1-\nu)}\, r\, \vec{e}_j \longrightarrow \vec{W}_j$$

$$div\, \vec{W} = W_{i,i} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{8\pi E(1-\nu)}\, r_{,j} \longrightarrow \Omega_j$$

Como consecuencia de todo lo expuesto la formulación del método para el caso termoelástico estacionario, con peso propio, fuerza centrífuga, y fuerzas exteriores será :

1) Identidad Somigliana

$$u_j(x) = \int_{\partial D} \left(t_i(y) + \gamma\,\theta\, n_i\right) U_{ji}\, dS - \int_{\partial D} T_{ji}(x,y)\, u_i(y)\, dS \; +$$

$$\int_{\partial D} \phi\, U_{ji}(x,y)\, n_i\, dS + \int_{\partial D} -(\gamma\,\theta_{,i})\, U_{ji}(x,y)\, n_i\, dS \; +$$

$$\int_{\partial D} W_j(x,y)\left(\phi_{,i} - \gamma\,\theta_{,i}\right) n_i\, dS \; -$$

$$\int_{\partial D} (\phi - \gamma\theta)\, W_{ji}(x,y)\, n_i\, dS \; -$$

$$\int_{\partial D} W(x,y)\, n_j\, \phi_{,ii}\, dS$$

que finalmente queda

$$u_j(x) = \int_{\partial D} [t_i + \phi]\, U_{ji}\, dS - \int_{\partial D} u_i\, T_{ji}\, dS$$

$$+ \int_{\partial D} W_j\, [\phi_{,i} - \gamma\,\theta_{,i}]\, n_i\, dS - \int_{\partial D} [\phi - \gamma\theta]\, W_{ji}\, n_i\, dS$$

$$- \phi_{,ii} \int W\, n_j\, dS$$

$$W(x,y) = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{8\pi E\,(1-\nu)}\; r(x,y)$$ función de influencia.

$$\phi = -\rho g z + \frac{1}{2}\rho\, \omega^2 r^2$$

2) Proceder de forma idéntica a la indicada en la explicación del método. La única diferencia consistirá en que en la identidad de Somigliana -- existirán términos adicionales.

## 4.- Implementación de un programa para la resolución de problemas termoelásticos estacionarios.

Como aplicación de las ideas anteriores, se ha desarrollado un programa de ordenador para resolver problemas termoelásticos estacionarios, por el método -- de los elementos de contorno.

Se ha discretizado el contorno en elementos planos triangulares, y se han asumido variaciones constantes de las tensiones y desplazamientos sobre cada elemento, tomándose como nodos los baricentros de cada triángulo.

En consecuencia

$$c_{ij} = 0 \quad i \neq j \qquad i = 1,2,3$$
$$c_{ij} = \frac{1}{2} \quad i = j \qquad j = 1,2,3$$

si no se consideran las fuerzas de peso propio y centrífugas el tratamiento numérico en el contorno conduce a la ecuación

$$\frac{1}{2} u_j(L) + \sum_{K=1}^{N} u_i(K) \int_{\partial D_K} T_{ji}(L,K)\, dS_K = \sum_{K=1}^{N} t_i(K) \int_{\partial D_K} U_{ji}(L,K)\, dS_K$$
$$- \sum_{K=1}^{N} n_i \gamma\, \theta_{,i} \int_{\partial D_K} W_{,j}(L,K)\, dS_K + \sum_{K=1}^{N} n_i \gamma\, \theta \int_{\partial D_K} W_{,ji}(L,K)\, dS_K$$

cuando la solución fundamental se aplica en el punto (L) baricentro del elemento L.

En este caso el número N de elementos, coincide con el número n de nodos. Al situarse la solución fundamental en los N baricentros $(L = 1, 2, \ldots, N)$ se obtiene el sistema de 3 N ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{1}{2} u_j(L) + \sum_{K=1}^{N} A_{ji}^{LK} u_i(K) = \sum_{K=1}^{N} B_{ji}^{LK} t_i(K) + \gamma \sum_{K=1}^{N} \left[ D_{ji}^{LK} \theta(K) - C_j^{LK} \theta_i \right] n_i \\ j = 1, 2, 3 \\ L = 1, 2, \ldots, N \end{cases}$$

El número de variables $U_i$ (K), $t_i$ (K) K= 1, 2 ....N es 6 N. La mitad son introducidas como datos del problema y resolviendo a continuación el sistema de ecuaciones quedan determinados los valores de las variables restantes.

El valor de las constantes

$$\left\{ \begin{matrix} A_{ji}^{LK}, & B_{ji}^{LK} \\ C_j^{LK}, & D_{ji}^{LK} \end{matrix} \right\} \qquad \begin{matrix} j = 1, 2, 3 & i = 1, 2, 3 \\ L = 1, 2, \ldots N & K = 1, 2, \ldots, N \end{matrix}$$

se obtiene efectuando la integración sobre los elementos por el método numérico de Gauss, a excepción de aquellos casos en que la integración se esté realizando sobre el elemento, en cuyo baricentro esté aplicada la carga puntual o solución fundamental. En estos casos (L = K) las funciones de influencia $T_{ji}$, $U_{ji}$, $W_j$, $W_{ji}$ tienden a valores infinitos en las proximidades del baricentro, y es necesario recurrir a medios analíticos para su integración.

## BIBLIOGRAFIA


1. Paris Carballo Federico

"El método de los elementos de contorno en la teoría del potencial y la elasticidad". Tesis doctoral. Ingenieros industriales. Madrid.

2. Banerjee, Butterfield

"Developments in Boundary Element Methods". Applied Science Publishers 1.979.

3. Cruse T.A.

"Numerical Solutions in three-Dimensional Elastostatics". Int. J. Solids Structures, 1.969 Vol. 5 pp 1259 a 1274.

4. Parkus Heinz

"Termoelasticity". Springer Verlag 1.976.

5. Fung Y.C.

"Foundations of solid mechanics". Prentice hall.